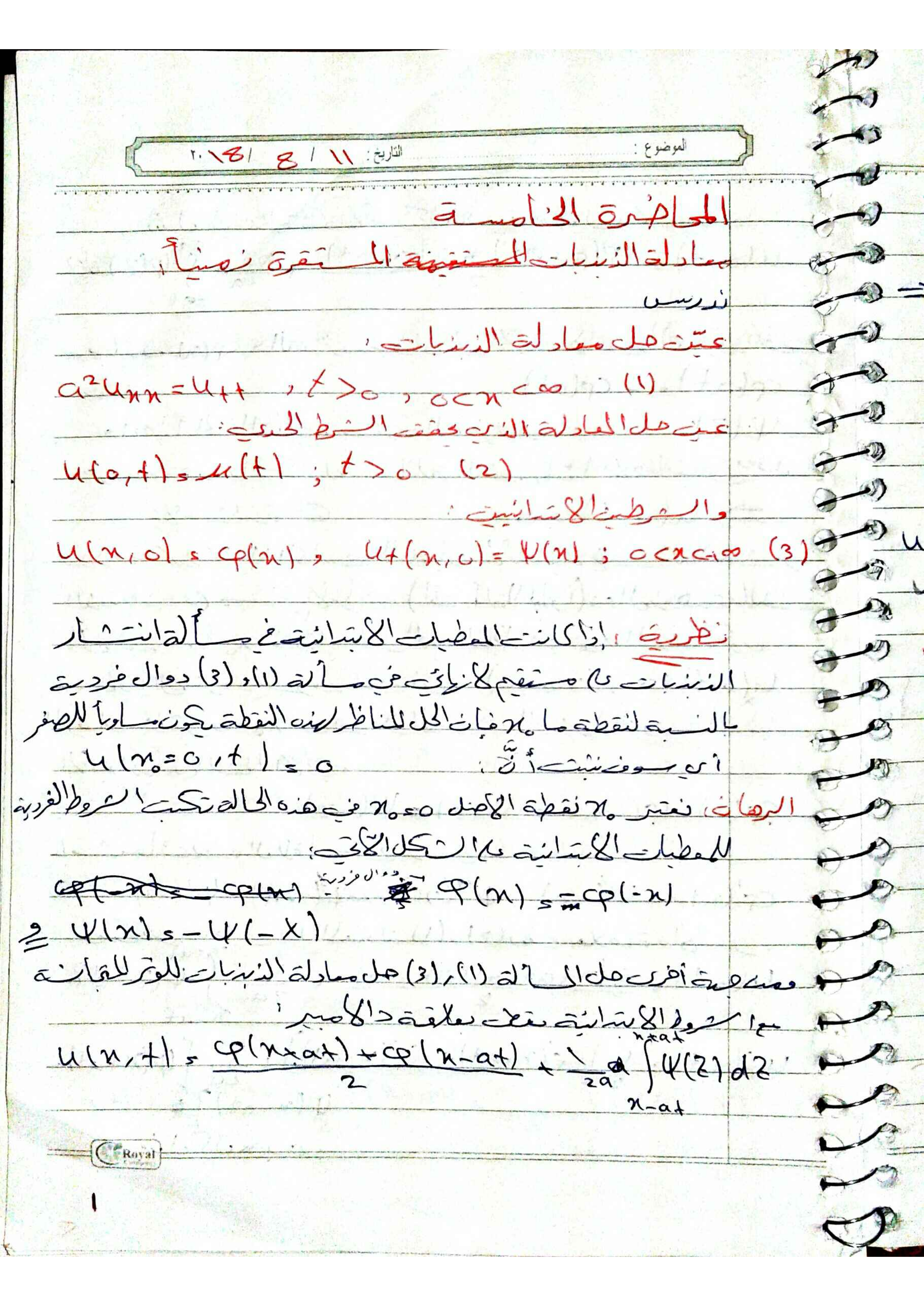


الموضوع : .... التاريخ: ١١ / 8 / ٢٠١٨

المحاضرة الخامسة

معادلة الذبذبات المستقرة زمنياً:

ندرس

عين حل معادلة الذبذبات:

$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad , t > 0 \quad , 0 < x < \infty \quad (1)$

عين حل المعادلة الذي يحقق الشرط الحدي:

$u(0,t) = \mu(t) \quad ; t > 0 \quad (2)$

والشرطين الابتدائيين:

$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad ; 0 < x < \infty \quad (3)$

نظرية: إذا كانت المعطيات الابتدائية في مسألة انتشار الذبذبات في مستقيم لانهائي في مسألة (1)، (3) دوال فردية بالنسبة لنقطة ما x_0 فإن الحل المناظر لهذه النقطة يكون مساوياً للصفر أي سوف نثبت أن:

$u(x_0 = 0, t) = 0$

البرهان: نعتبر x_0 نقطة الأصل $x_0 = 0$ في هذه الحالة تكتب الشروط الفردية للمعطيات الابتدائية على الشكل الآتي:

~~$\varphi(-x) = -\varphi(x)$~~ دوال فردية $\varphi(x) = -\varphi(-x)$

و $\psi(x) = -\psi(-x)$

ومن جهة أخرى حل المسألة (1)، (3) حل معادلة الذبذبات للوتر اللانهائية مع الشروط الابتدائية يعطى بعلاقة دالامبير:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz$$

الموضوع : التاريخ : / / ٢٠

نبدل في علاقة دالامبير كل x بـ ٥ فنحصل على:

$$u(0,t) = \frac{\varphi(0+at) + \varphi(0-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(z)\,dz$$

بما أن $\varphi(x)$ دالة فردية فإن الحد الأول يطابق الصفر وذلك
بسبب: $\varphi(-at) = -\varphi(at)$

وأيضاً الحد الثاني يساوي الصفر لأن $\psi(z)$
فردية وحدود التكامل متماثلة بالنسبة لمبدأ الإحداثيات ومختلفة
بالإشارة $\Leftarrow$ $\Rightarrow u(0,t) = 0$

نظرية /2/: إذا كانت المعطيات الابتدائية في مسألة انتشار الذبذبات على مستقيم لانهائي (للمسألة الأولى) دوال زوجية بالنسبة إلى نقطة ما x فإن مشتق الحل المناظر في هذه النقطة يكون مساوياً الصفر أي سوف نثبت أن: $u_x(0,t) = 0$, $(x_0 = 0)$

البرهان: نعتبر $x_0 = 0$ في هذه الحالة تكتب الشروط الزوجية للمعطيات الابتدائية بالشكل الآتي:

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \quad , \quad \psi(x) = \psi(-x)$$

باشتقاق هذه العلاقات نحصل على:

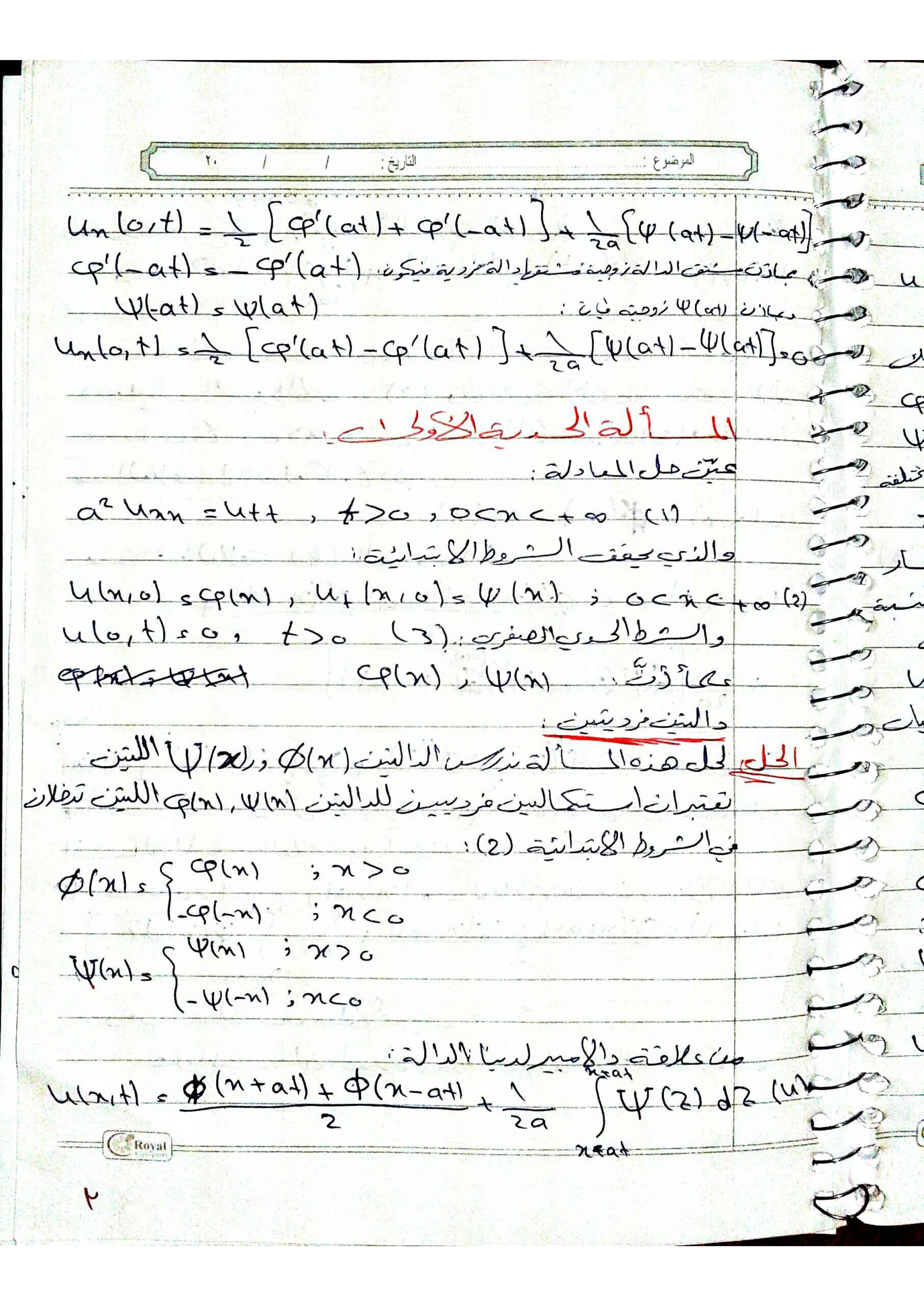
$$\varphi'(x) = -\psi'(-x) \quad , \quad \psi'(x) = -\psi'(-x)$$

ومن جهة أخرى حل المعادلة (1), (2) يعطى بعلاقة دالامبير:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz$$

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\psi(x+at) - \psi(x-at)\right]$$

نبدل كل x بـ ٥:



$$u_x(0,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi'(at)+\varphi'(-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\psi(at)-\psi(-at)\right]$$

بما أن مشتق الدالة زوجية مشتق دالة فردية فيكون: $\varphi'(-at) = -\varphi'(at)$

وبما أن $\psi(at)$ زوجية فإن: $\psi(-at) = \psi(at)$

$$u_x(0,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi'(at)-\varphi'(at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\psi(at)-\psi(at)\right] = 0$$

المسألة الحدية الأولى:

أوجد حل المعادلة:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad t>0, \quad 0<x<+\infty \quad (1)$$

والذي يحقق الشروط الابتدائية:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \; ; \quad 0<x<+\infty \quad (2)$$

والشرط الحدي الصفري: $u(0,t) = 0, \quad t>0 \quad (3)$

علماً أن: $\varphi(x), \psi(x)$ ~~$\varphi(x) = \psi(x)$~~

دالتين فرديتين:

الحل: لحل هذه المسألة ندرس الدالتين $\phi(x), \Psi(x)$ اللتين تعتبران استكمالين فرديين للدالتين $\varphi(x), \psi(x)$ اللتين تدخلان في الشروط الابتدائية (2):

$$\phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & ; x>0 \\ -\varphi(-x) & ; x<0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & ; x>0 \\ -\psi(-x) & ; x<0 \end{cases}$$

من علاقة دالامبير لدينا الدالة:

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(z)\,dz \quad (4)$$

معرفة لجميع قيم x و $t>0$ ووفقاً للنظرية الأولى سيكون:

$$u(0,t)=\frac{\phi(at)+\phi(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(z)\,dz=0$$

وحسب نظرية عندما $x=0$ فإن: $u(0,t)=0$

أي يحقق الشرط الحدي (3). ومن جهة أخرى فإن هذه الدالة عندما $t=0$, $x>0$ تحقق الشروط الابتدائية (2) وذلك لأن: من العلاقة (4) نبدل كل t بصفر:

$$u(x,0)=\phi(x)=\varphi(x)$$

نشتق العلاقة (4) بالنسبة لـ t:

$$u_t(x,t)=\frac{a\,\phi'(x+at)-a\,\phi'(x-at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\left[a\psi(x+at)+a\psi(x-at)\right]$$

(تصحيح فوق الإشارة: $-(-a)$)

$x>0$:

$$u_t(x,0)=\frac{a\phi'(x)-a\phi'(x)}{2}+\frac{1}{2}\left[2\psi(x)\right]=\psi(x)$$

وبالعودة إلى الدوال الأصلية $\varphi(x)$, $\psi(x)$ يمكن كتابة حل المسألة المعطى بالعلاقة (4) على الشكل الآتي:

(1) عندما $x-at>0$ $(x>at)$ من العلاقة (4) تكتب على الشكل التالي:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz$$

وهي علاقة دالامبير.

حل المسألة الحدية عندما: $x-at>0$ هي عبارة عن علاقة دالامبير.

الموضوع : .... التاريخ : / / ٢٠

ب/2) حالة $x-at<0$ أي $(x<+at)$

من علاقة (4) نجد: ($x<0$)

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0}-\psi(-z)\,dz}_{I}+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(z)\,dz$$

$$I=-\int_{x-at}^{0}\psi(-z)\,dz$$

نفرض: $-z=v \Rightarrow dz=-dv$

$z=x-at \Rightarrow v=at-x$

$z=0 \Rightarrow v=0$

$$I=+\int_{at-x}^{0}\psi(v)\,dv$$

$$I=\int_{at-x}^{0}\psi(z)\,dz$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{0}\psi(z)\,dz+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(z)\,dz \Rightarrow$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(z)\,dz$$

وهو المطلوب.

الموضوع :   التاريخ :   /   / ٢٠

طريقة فصل المتغيرات (طريقة فورييه):

① المعادلة المتجانسة للذبذبات الحرة للوتر:

أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (1)$$

والمحقق للشروط الحدية الصفرية:

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(\ell,t) = 0 \quad (2)$$

والشروط الابتدائية:

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (3)$$

الحل: صياغة المسألة الأساسية:

عيّن حل المعادلة (1) الذي لا يساوي الصفر بالتطابق والذي يحقق الشروط المتجانسة الحدية (2) والقابل للتعبير عنه في صورة حاصل الضرب:

$$u(x,t) = X(x)\, T(t) \quad (4)$$

علماً أن X تابعة لـ x فقط و T تابعة لـ t فقط.

هذا الحل يجب أن يحقق المعادلة (1) حيث $X(x) \neq 0$، $T(t) \neq 0$

$$u_t = X(x)\, T'(t)$$

$$u_{tt} = X(x)\, T''(t)$$

$$u_x = X'(x)\, T(t)$$

$$u_{xx} = X''(x)\, T(t)$$

نبدل في المعادلة (1) فنحصل على:

$$X(x)\, T''(t) = a^2 X''(x)\, T(t)$$

وبقسمة طرفي المعادلة على: $a^2 T(t) \cdot X(x) \neq 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (5)$$

Royal Company

الطرفان الأيمن والأيسر في العلاقة (5) يحتفظان عند تغير متغيرهما بقيمة ثابتة، ومن ثم يمكن كتابتهما بالشكل الآتي:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \quad (6)$$

علماً أن λ ثابت نأخذه لسهولة الحل بإشارة سالبة.
دون أن نفترض شيئاً عند ذلك عن إشارته.
من العلاقة (6) نحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad , \quad X(x) \neq 0 \quad (7)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad ; \quad T(x) \neq 0 \quad (8)$$

ونطبق الشروط الحدية (2). من (2) و(4) نجد:

$$0 = X(0) \cdot T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$0 = X(\ell) \cdot T(\ell) \Rightarrow X(\ell) = 0$$

ومن هنا ينتج أن الدالة $X(x)$ يجب أن تحقق الشرطين الإضافيين:

$$X(0) = 0 \quad , \quad X(\ell) = 0 \quad (9)$$

وإلا فقد كنا سنحصل على:
$T(t) = 0$
أي أن $u(x,t) = 0$ في حين أن المسألة تنحصر في
تعيين الحل الغير التافه (الغير الصفري) ولا توجد أي شروط إضافية
$T(t)$ في المسألة المساعدة الأساسية.
وبذلك فنتيجة لتعيين الدالة $X(x)$ نصل إلى مسألة بسيطة هي
مسألة القيم الذاتية الآتية:
عيّن قيم البارامتر λ التي توجد عندها حل غير تافه للمسألة

$$\left.\begin{aligned} & X'' + \lambda X = 0 \\ & X(0) = X(\ell) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

وكذلك عيّن هذه الحلول.
فقيم البارامتر λ تسمى بالقيم الذاتية والحلول غير التافهة المناظرة لهذه القيم تسمى بالدوال الذاتية للمسألة (١٥).

حالة $\lambda < 0$ وسوف نثبت أن المسألة لا تملك حلول غير الحلول التافهة أي سوف نثبت أن: $X(x) = 0$

وذلك لأن: $p^2 + \lambda = 0 \Rightarrow p^2 = -\lambda \Rightarrow p = \mp\sqrt{-\lambda}$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

علماً أن c_1, c_2 ثابتان اختياريان ونحددهما من الشروط المرافقة:

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2$$
$$X(\ell) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}$$
$$\Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$0 = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} - c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}$$

$$c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}\right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

نبدل في عبارة الحل العام: $X(x) = 0$

ومن ثم نبدل في (٤) فنحصل على: $u(x,t) = 0$ وهذا مرفوض

حالة $\lambda = 0$ في هذه الحالة المسألة لا تملك سوى الحل الصفري

وذلك لأن المعادلة (١٥): $X'' = 0 \Rightarrow X' = c_1 \Rightarrow$

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X(\ell) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \ell + c_2 \Rightarrow c_1 \ell = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$\Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow$ نبدل في (٤) $\Rightarrow$

$$u(x,t) = 0$$

وهذا مرفوض لأننا نبحث عن الحل غير الصفري.

في حالة $\lambda > 0$:

$X'' + \lambda X = 0$

المعادلة المميزة $P^2 + \lambda = 0 \Rightarrow P^2 = -\lambda = \lambda i^2 \Rightarrow P = \mp\sqrt{\lambda}\, i$

$X(x) = a \cos\sqrt{\lambda}\, x + b \sin\sqrt{\lambda}\, x$

حيث a, b ثوابت اختيارية يتحدد من الشروط المرافقة

$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = a$

$X(\ell) = 0 \Rightarrow 0 = a \cos\sqrt{\lambda}\, \ell + b \sin\sqrt{\lambda}\, \ell \Rightarrow$

$C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, \ell = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\, \ell = 0$ (11)

(لأنه لو كان $b = 0$ لحصلنا على الحل الصفري وهذا مرفوض)

$\sin\sqrt{\lambda}\, \ell = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\, \ell = n\pi \quad ; n = 1, 2, \ldots$

$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{\ell} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad ; n = 1, 2, 3, \ldots$

وهي القيم الذاتية . وهذه القيم الذاتية تقابلها دوال ذاتية

هي : بتدل في عبارة الحل العام :

$X(x) = b_n \sin\frac{n\pi}{\ell} x$

وهكذا فقط عند قيم λ المساوية $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, (n = 1, 2, \ldots)$ (12)

توجد حلول غير تافهة (غير صفرية بالتطابق) للمسألة الحدية (10)

$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{\ell} x$ (13)

والقيم الذاتية λ_n تناظرها حلول للمعادلة (8) :

$T'' + a^2 \lambda T = 0$

المعادلة المميزة : $P^2 + a^2\lambda = 0 \Rightarrow P^2 = -a^2\lambda = a^2\lambda i^2$

$P = \mp a\sqrt{\lambda}\, i$

$T(t) = C \cdot \cos a\sqrt{\lambda}\, t + B \sin a\sqrt{\lambda}\, t$

$T_n(t) = C_n \cdot \cos\frac{n\pi}{\ell} a t + B_n \sin\frac{n\pi}{\ell} a t$ (14)

حيث C_n, B_n ثوابت اختيارية

نعوض في (4)

$$U_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$U_n(x,t) = \left(C_n \cos\frac{n\pi}{\ell} at + D_n \sin\frac{n\pi}{\ell} at\right)\sin\frac{n\pi}{\ell} x \quad (15)$$

وبالتالي حل المعادلة المطروحة (1) ، (2) ، (3) يعطى بالعلاقة الآتية:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t)$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\frac{n\pi}{\ell} at + D_n \sin\frac{n\pi}{\ell} at\right)\sin\frac{n\pi}{\ell} x$$

حيث أن:

C_n, D_n ثوابت اختيارية تتحدد من الدساتير التالية:

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\, d\xi$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\, d\xi$$

ملاحظة:

إذا أعطيت الشروط الحدية الصفرية على الشكل الآتي

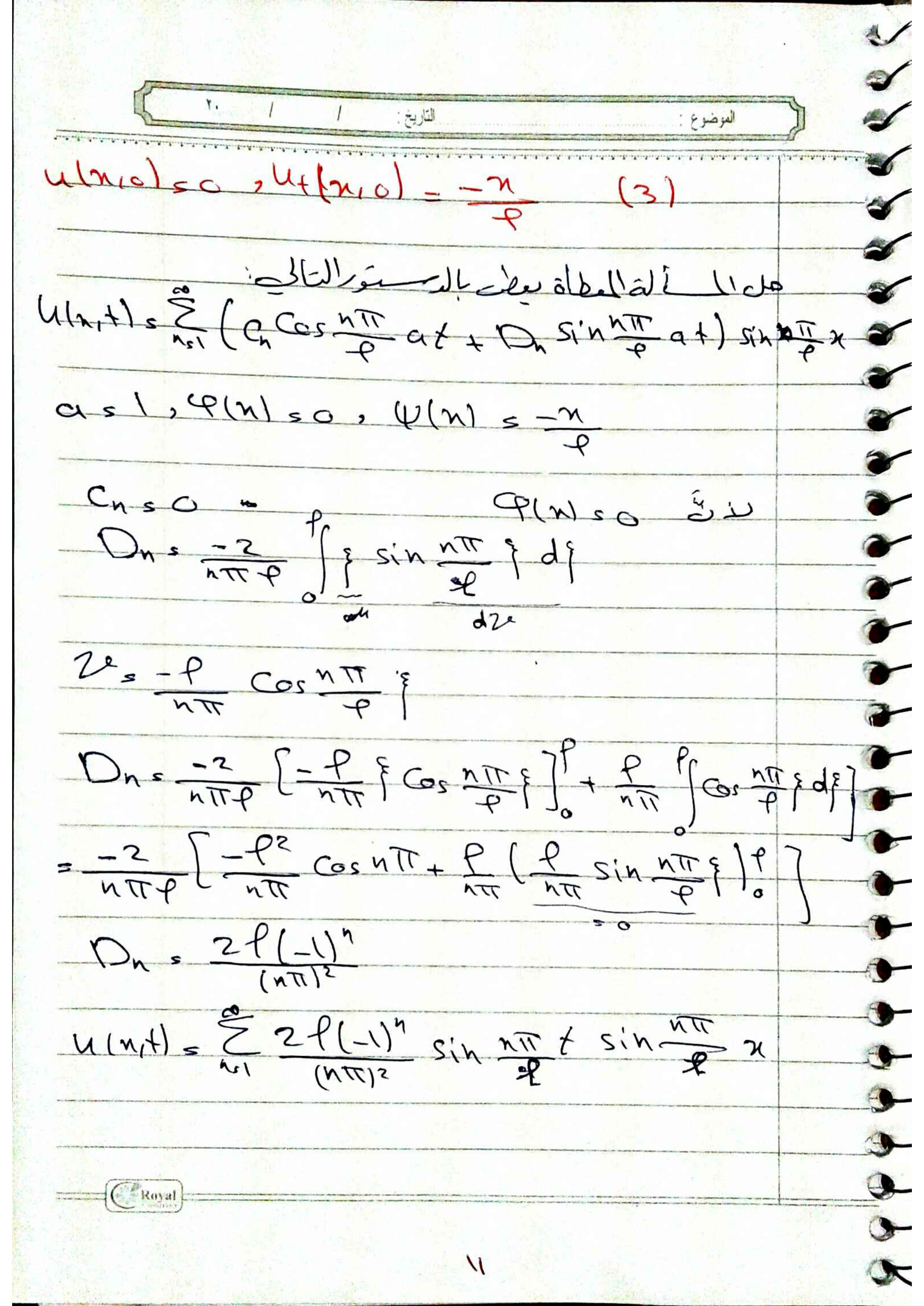
$$U(0,t) = 0 \quad , \quad U_x(\ell,t) = 0$$

عندئذٍ للحصول على الحل في هذه الحالة نبدل في الدساتير السابقة كل n بـ $\frac{2n+1}{2}$ والسلسلة تبدأ من: $n=0$

تمرين: أوجد حل المعادلة:

$$U_{tt} = U_{xx} \quad ; \quad 0 < x < \ell \quad , \quad t > 0 \quad (1)$$

$$U(0,t) = 0 \quad , \quad U(\ell,t) = 0 \quad (2)$$



$u(x,0)=0 \ , \ u_t(x,0) = \frac{-x}{\ell}$ (3)

حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos\frac{n\pi}{\ell} a t + D_n \sin\frac{n\pi}{\ell} a t \right) \sin\frac{n\pi}{\ell} x$$

$a=1 \ , \ \varphi(x)=0 \ , \ \psi(x) = \frac{-x}{\ell}$

$C_n = 0 \Leftarrow$ لأن $\varphi(x)=0$

$$D_n = \frac{-2}{n\pi\ell} \int_0^{\ell} \underbrace{\xi}_{u} \underbrace{\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \, d\xi}_{dv}$$

$$v = \frac{-\ell}{n\pi} \cos\frac{n\pi}{\ell}\xi$$

$$D_n = \frac{-2}{n\pi\ell} \left[\left[\frac{-\ell}{n\pi} \xi \cos\frac{n\pi}{\ell}\xi \right]_0^{\ell} + \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell} \cos\frac{n\pi}{\ell}\xi \, d\xi \right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi\ell} \left[\frac{-\ell^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{\ell}{n\pi} \underbrace{\left(\frac{\ell}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \right) \Big|_0^{\ell}}_{=0} \right]$$

$$D_n = \frac{2\ell(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ell(-1)^n}{(n\pi)^2} \sin\frac{n\pi}{\ell} t \ \sin\frac{n\pi}{\ell} x$$